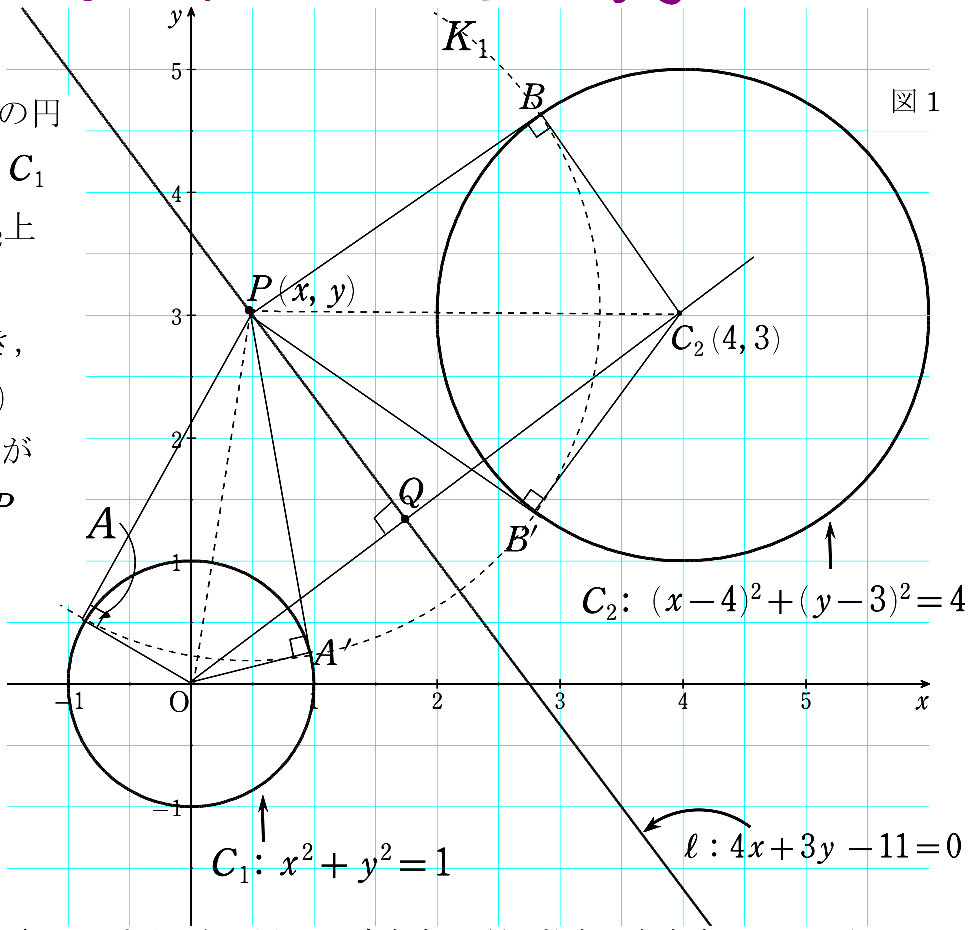
二つの円を仕切る直線

問題

図１のように，二つの円 C_1 と C_2 がある。円 C_1 上の動点 A，円 C_2 上の動点 B において，それぞれ接線を引き，その交点を $P(x,\ y)$ とする。$PA=PB$ が成り立つような点 P の軌跡を求めよ。



解答

OA は円 C_1 の半径であり，$OA=1$，円 C_2 の中心を $C_2(4,\ 3)$ としたとき，C_2B は 円 C_2 の半径だから，$C_2B=2$。　接線を引いているので，$\angle PAO=\angle PBC_2=90°$，

$\triangle OAP$ と $\triangle C_2BP$ は直角三角形だから三平方の定理より，$PA^2+OA^2=OP^2$，

$PB^2+C_2B^2=C_2P^2$，題意より　$PA^2=PB^2 \iff OP^2-OA^2=C_2P^2-C_2B^2$

$(x,\ y)$ に直すと，$x^2+y^2-1=(x-4)^2+(y-3)^2-4$，　式を整理して，

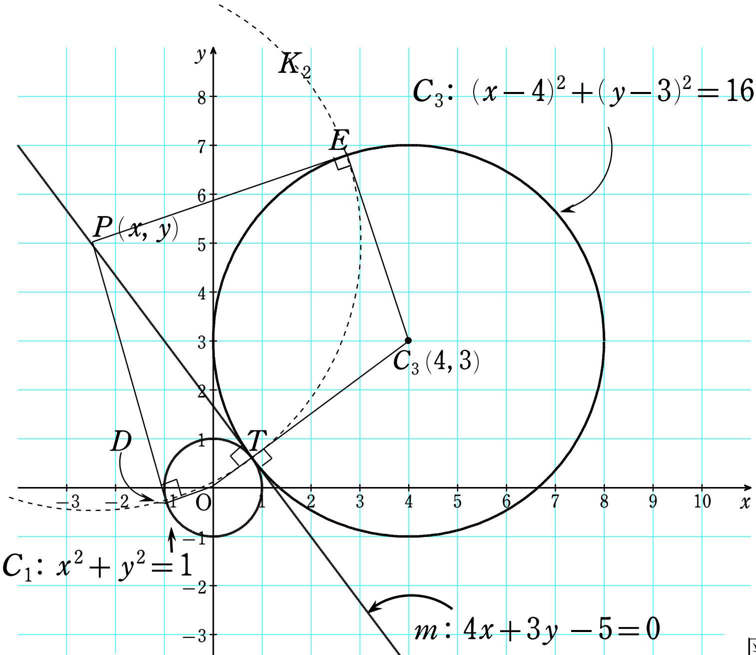
$8x+6y-22=0$ ……①，さらに両辺を2で割って，$4x+3y-11=0$ ……②

ゆえに点 P の軌跡は直線 $4x+3y-11=0$ である。この直線を「**二つの円を仕切る直線 ℓ**」と名付けよう。二つの円で，もう一つの接点を図１のように A'，B' とすると，

$PA=PA'=PB=PB'$ となるので，4点 A，A'，B'，B は点 P を中心とした円 K_1 上にある。点 P が直線 ℓ 上を動いていくとき，円 K_1 も動いていく。

円 K_1 の半径が最小になるのは，点 P が直線 ℓ と直線 OC_2 の交点 Q の位置にきたときで，

Q の座標は直線 $\ell\,(4x+3y-11=0)$，直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ の交点として求め，$Q\left(\dfrac{44}{25},\ \dfrac{33}{25}\right)$ となる。



← 図 2

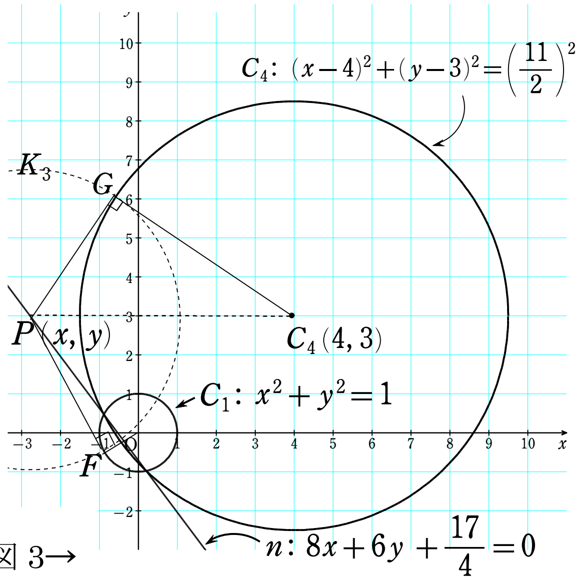


図 3→

研究

次に，二つの円 C_1とC_3 が 共有点を１つだけもつ場合，つまり二つの円 C_1とC_3 が 接する場合を考えてみよう。結論からいうと，「二つの円 C_1とC_3 の共通接線」が，接線の長さが等しいように動く点 Pの軌跡となる。理由は，点 P から引いた接線の円 C_1とC_3 における接点をそれぞれ D，E とおき，二つの円 C_1，C_3 の共通接線の接点を T とすると，接線の性質より常に $PD=PT=PE$ となり，条件を満たしているからである。　二つの円 C_1とC_3 が 接する場合は，共通接線が「**二つの円を仕切る直線 m**」（接点 Tを除く） となる。それでは，共通接線の方程式をどのようにして求めるのか？

定理「異なる二つの曲線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ がいくつかの交点をもつとき，方程式 $k\,f(x,\ y)+g(x,\ y)=0$ （kは定数） は，それらの交点すべてを通る曲線を表す［ただし，曲線 $f(x,\ y)=0$を除く ］。」を用いて求める。 この場合， $k=-1$ として，$(x-4)^2+(y-3)^2-16-(x^2+y^2-1)=0$ とすれば，$8x+6y-10=0 \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$ として，共通接線 m の方程式が得られるのである。(図２)

さらに，二つの円 C_1とC_4 が交わる場合も，図３で**解答**と同じように接点を F，Gとし，

$$PF^2=PG^2 \Leftrightarrow OP^2-OF^2=C_4P^2-C_4G^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=(x-4)^2+(y-3)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2-(x^2+y^2-1)=0 \Leftrightarrow 8x+6y+\frac{17}{4}=0$$ となる。やはり，

「C_1とC_4 の交点を通る直線」(「共通弦」の部分を除く) が，「**二つの円を仕切る直線 n** 」なのだ。 **問題**・**解答**の ① を求める計算で，同じことをしていたことに気づくのである。